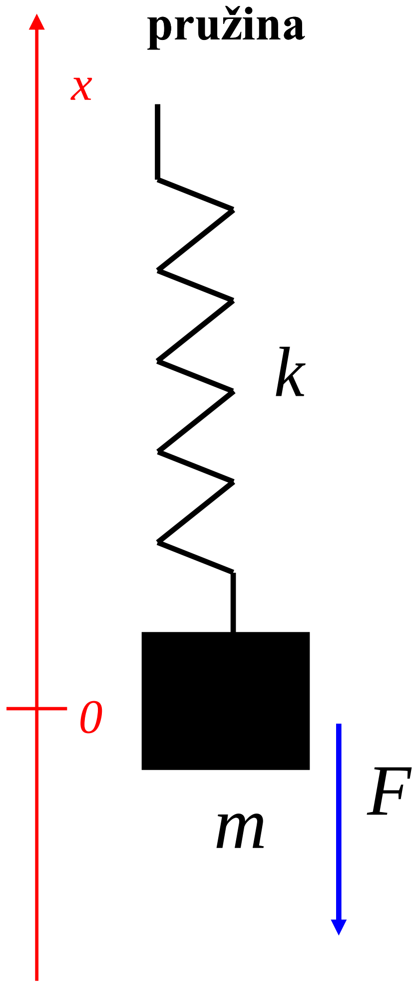
Opakování - Nucené kmity s tlumením



• budící síla:

$$F = F_0 \sin(\Omega t)$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$$

$$\ddot{x} + 2\delta + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$$

• **Partikulární řešení**:

$$x_p = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \sin\left(\Omega t + \operatorname{arctg}\frac{2\delta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}\right)$$

• Část řešení: $C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}, \quad \alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

konverguje k nule s rostoucím časem. Po dostatečně dlouhé době v **ustáleném stavu** lze tento člen zanedbat a za řešení pokládat pouze x_p.

Opakování - Nucené kmity s tlumením v ustáleném stavu

- **Amplituda kmitů:**

$$A_p = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}A_p}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{2F_0\left(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\delta^2\right)\Omega}{m\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}A_p}{\mathrm{d}\Omega} = 0$$

$$\downarrow$$

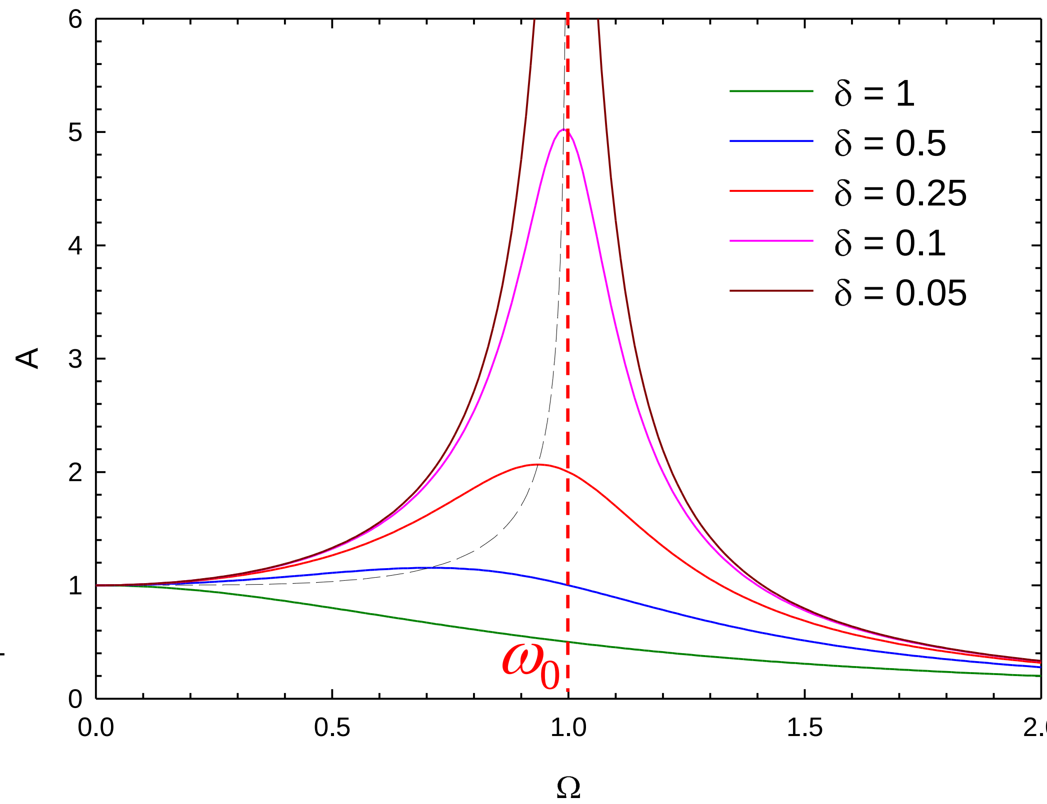
- **rezonance amplitudy**

$$\Omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2 \Rightarrow \Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$A_p\left(\Omega_r\right) = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\left(\omega_0^2 - \delta^2\right)}}$$

$$\lim_{\delta\to 0} A_p\left(\Omega_r\right) = \infty \qquad x_s = A_p(0) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

$\omega_0 = 1$, $F_0 = 1$, $m = 1$



Nucené kmity s tlumením v ustáleném stavu

• **Fázový posuv:** $$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

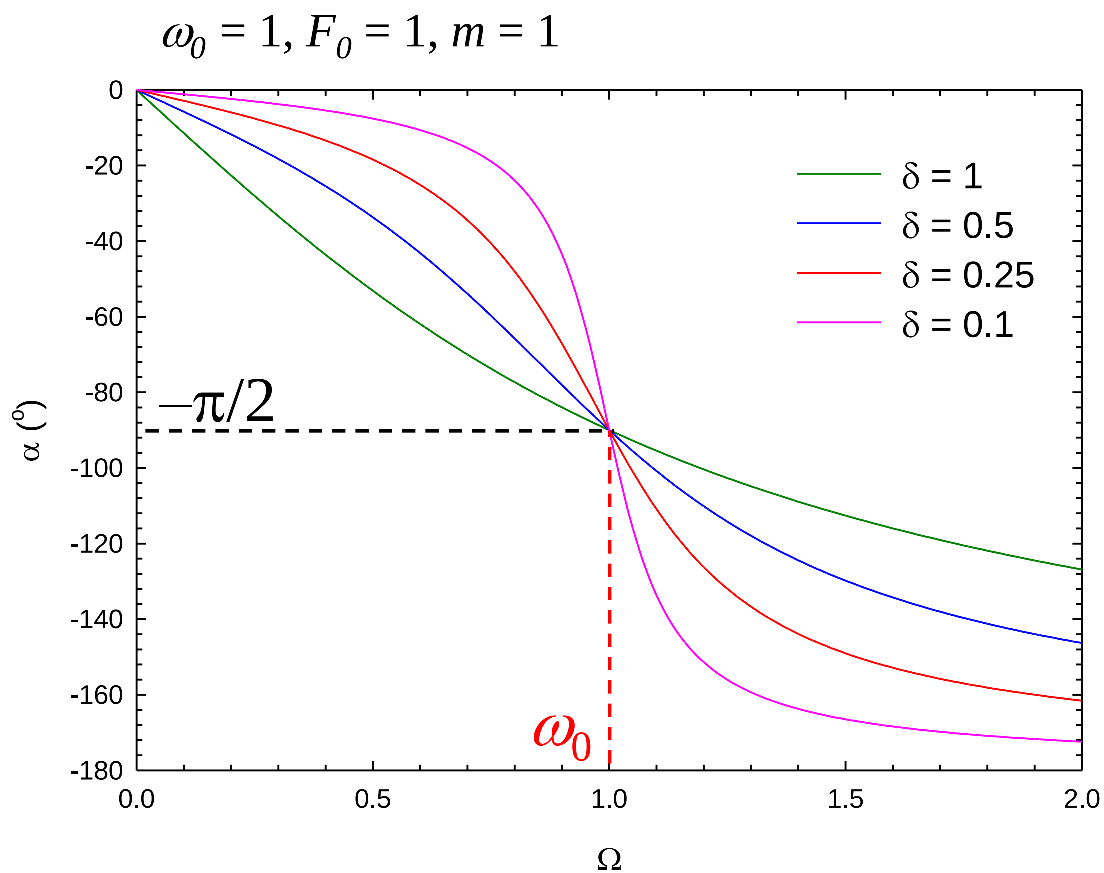
$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$\alpha(\Omega_r) = \mathrm{arctg}\left(-\frac{\Omega_r}{\delta}\right)$$

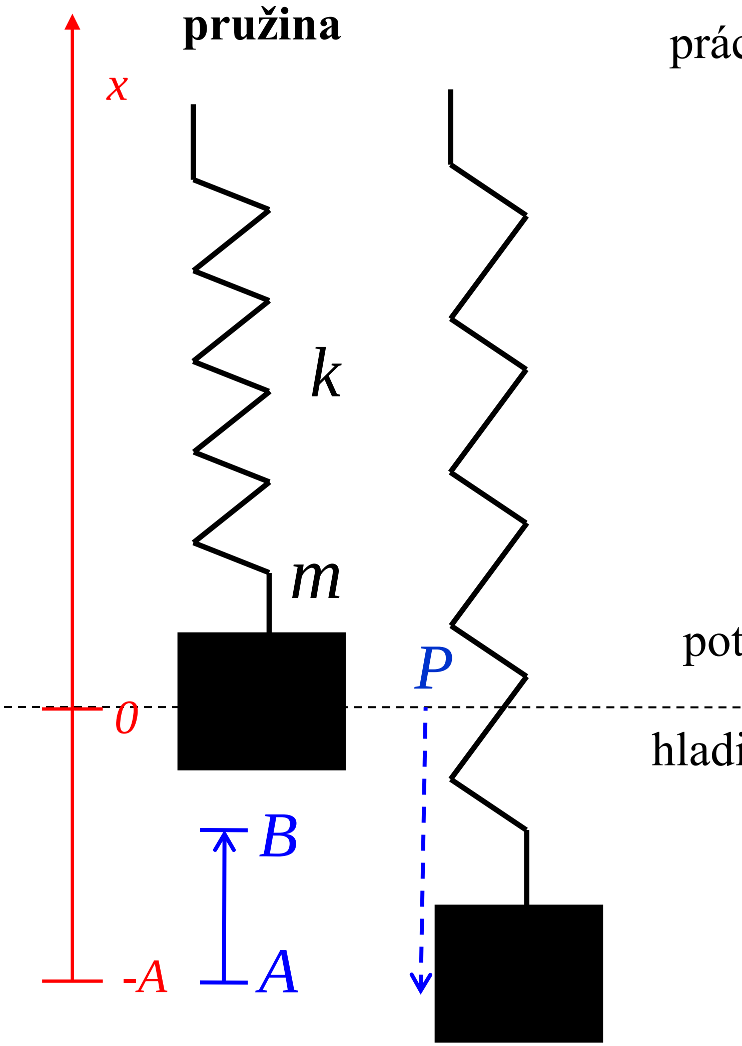
• malé Ω: pohyb přibližně ve fázi s vynucující silou

• oblast rezonance $\Omega \approx \omega_0$: fázové zpoždění $-\pi/2$ (pohyb je přibližně ve fázi s rychlostí)

• velké Ω: fázové zpoždění $-\pi$



Opakování - Harmonický oscilátor – potenciální energie



práce, kterou vykoná pružina při přesunu závaží z A do B:

$$A_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} -kx \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} k\left(x_B^2 - x_A^2\right)$$

$$A_{PA} = \int_{x_P}^{x_A} -kx \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} k\left(x_A^2 - x_P^2\right) = -\frac{1}{2} k\, x_A^2$$

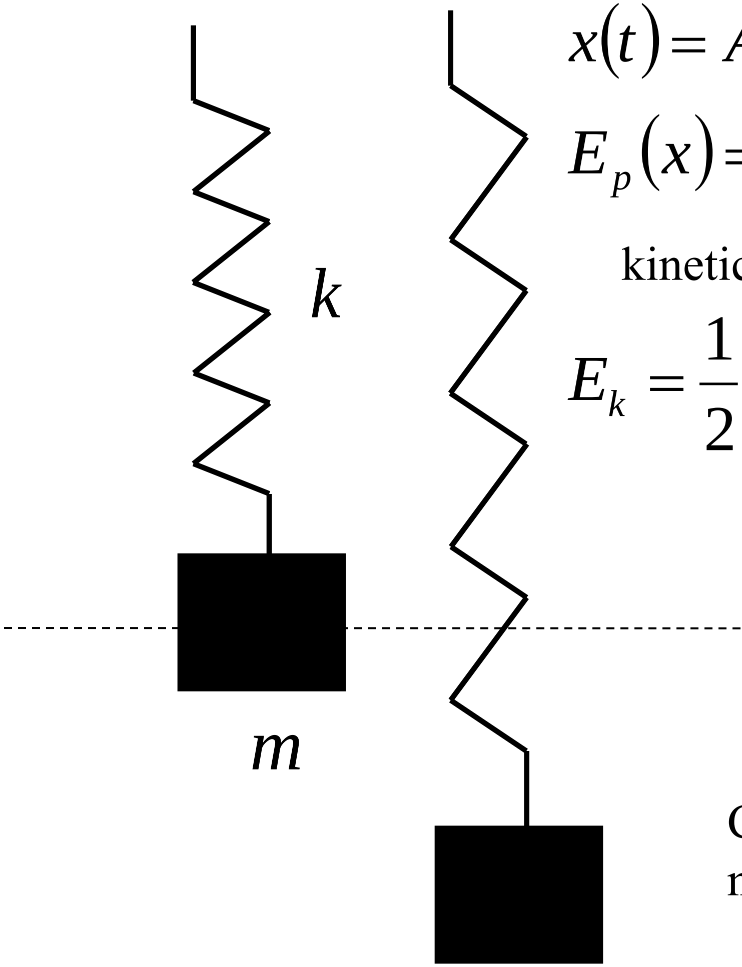
potenciální energie v bodu A: $E_p(A) = -A_{PA} = \frac{1}{2} k x_A^2$

hladina nulové potenciální energie

potenciální energie pružiny: $E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2$

Opakování - Harmonický oscilátor – kinetická energie

pružina



potenciální energie:

$$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi),\quad \dot{x}(t)=A\omega\cos(\omega t+\varphi),\quad k=m\omega^2$$

$$E_p(x)=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

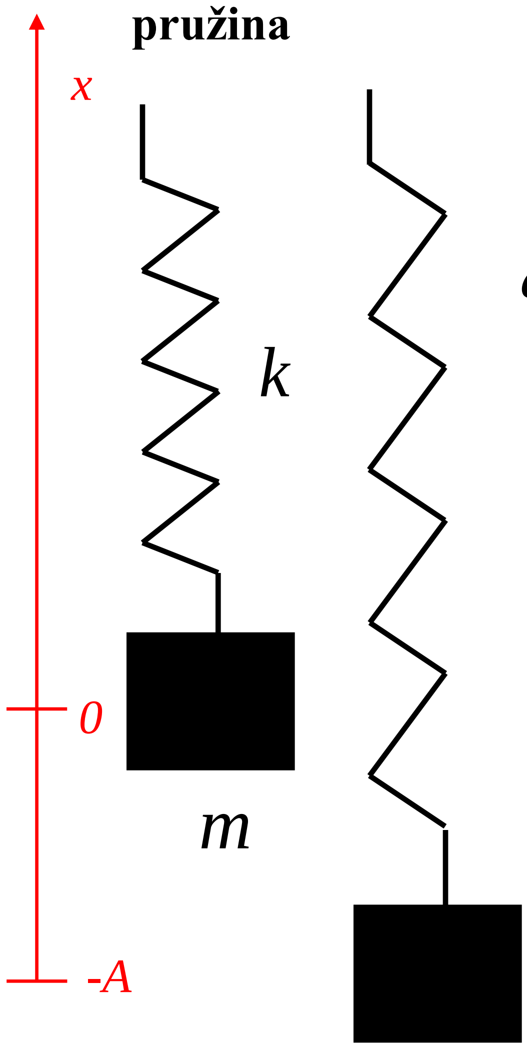
kinetická energie:

$$E_k=\frac{1}{2}mv_x^{\,2}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

celková energie : $E_M=E_k+E_p=\frac{1}{2}mA^2\omega^2$

Celková mechanická energie harmonického kmitu je konstantní nezávislá na čase.

Mechanická energie tlumeného harmonického kmitu



Tlumící (odporující) síla:

$$F_v = -h\dot{x}$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

Pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x = Ae^{-\delta t}\sin\left(\omega_0 t + \alpha\right)$$

Celková mechanická energie tlumeného harmonického kmitu je vlivem disipativní odporující síly závislá na čase.

$$E_m(t) = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

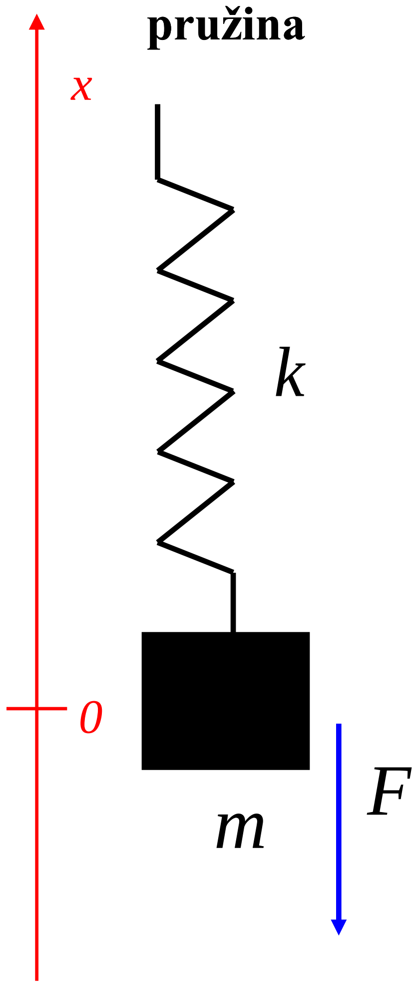
Pro časovou změnu mechanické energie můžeme tedy psát:

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\left(m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx\right) \qquad m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx = -h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}F_v = -h\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

Rychlost ubývání mechanické energie tlumeného harmonického kmitu.

Mechanická energie nucených kmitů s tlumením v ustáleném stavu



• budící síla:

$$F = F_0 \sin(\Omega t)$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$$

$$x_p = A_p \sin(\Omega t + \alpha)$$

$$\dot{x}_p = A_p \Omega \cos(\Omega t + \alpha)$$

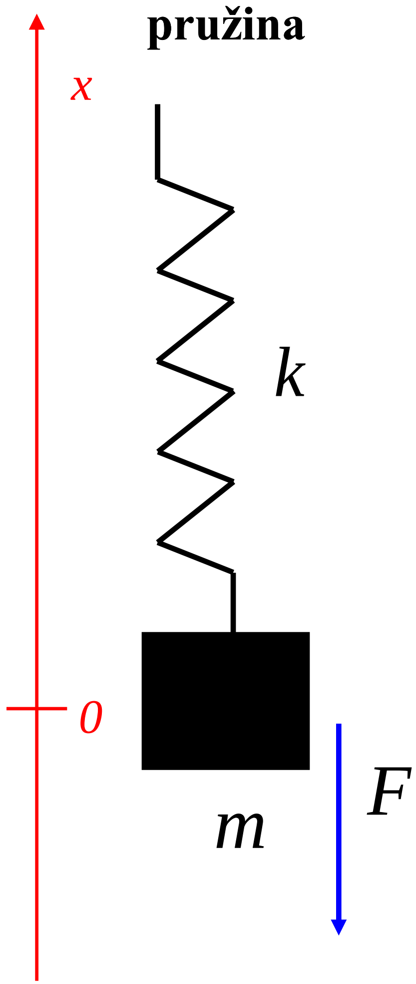
Působením disipativní síly F_v se energie rozptyluje i v případě nucených harmonických kmitů v ustáleném stavu:

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}F_v = -h\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

Energie rozptýlená během jednoho kmitu působením disipativní síly F_v :

$$\Delta E_m = -h\int_0^T \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 dt = -h\int_0^T \left(A_p\Omega\cos(\Omega t + \alpha)\right)^2 dt = -hA_p^2\Omega^2\frac{T}{2}$$

Mechanická energie nucených kmitů s tlumením v ustáleném stavu



• budící síla:

$$F = F_0 \sin(\Omega t)$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$$

$$x_p = A_p \sin(\Omega t + \alpha)$$

$$\dot{x}_p = A_p \Omega \cos(\Omega t + \alpha)$$

V ustáleném stavu je však úbytek energie doplněn prací vykonanou na hmotný bod vynucující silou *F*. Průměrný výkon P_v disipativní síly F_v během jednoho kmitu a průměrný výkon *P* vynucující síly *F* jsou pak:

$$P = -P_v = -\frac{\Delta E_m}{T} = hA_p^2\Omega^2\frac{1}{2} = m\delta A_p^2\Omega^2$$

$$A_p = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \Rightarrow P = \frac{F_0\Omega^2\delta}{m\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]}$$

Nucené kmity s tlumením v ustáleném stavu

• výkon vynucovací síly:

$$P(\Omega)=\frac{F_0^{\,2}\Omega^2\delta}{m\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\delta^2\Omega^2\right]}$$

rezonance výkonu nastává pro

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=0 \longrightarrow \Omega=\omega_0$$

$$P(\omega_0)=\frac{F_0^{\,2}}{4m\delta}$$

$$\frac{1}{2}P(\omega_0)=\frac{F_0^{\,2}}{8m\delta}=\frac{F_0^{\,2}\Omega^2\delta}{m\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\delta^2\Omega^2\right]}$$

$$\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2=4\delta^2\Omega^2$$

$$\Omega_1=-\delta+\sqrt{\delta^2+\omega_0^2}$$

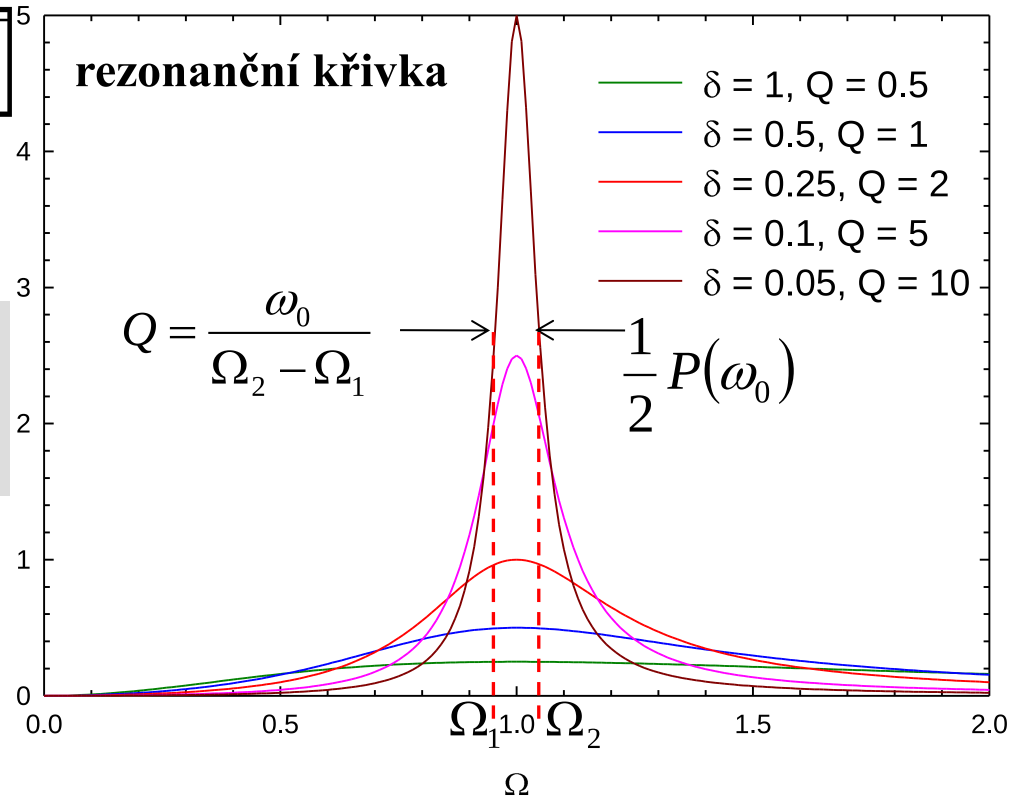
$$\Omega_2=+\delta+\sqrt{\delta^2+\omega_0^2}$$

$$\Omega_3=-\delta-\sqrt{\delta^2+\omega_0^2}<0$$

$$\Omega_4=+\delta-\sqrt{\delta^2+\omega_0^2}<0$$

• činitel jakosti

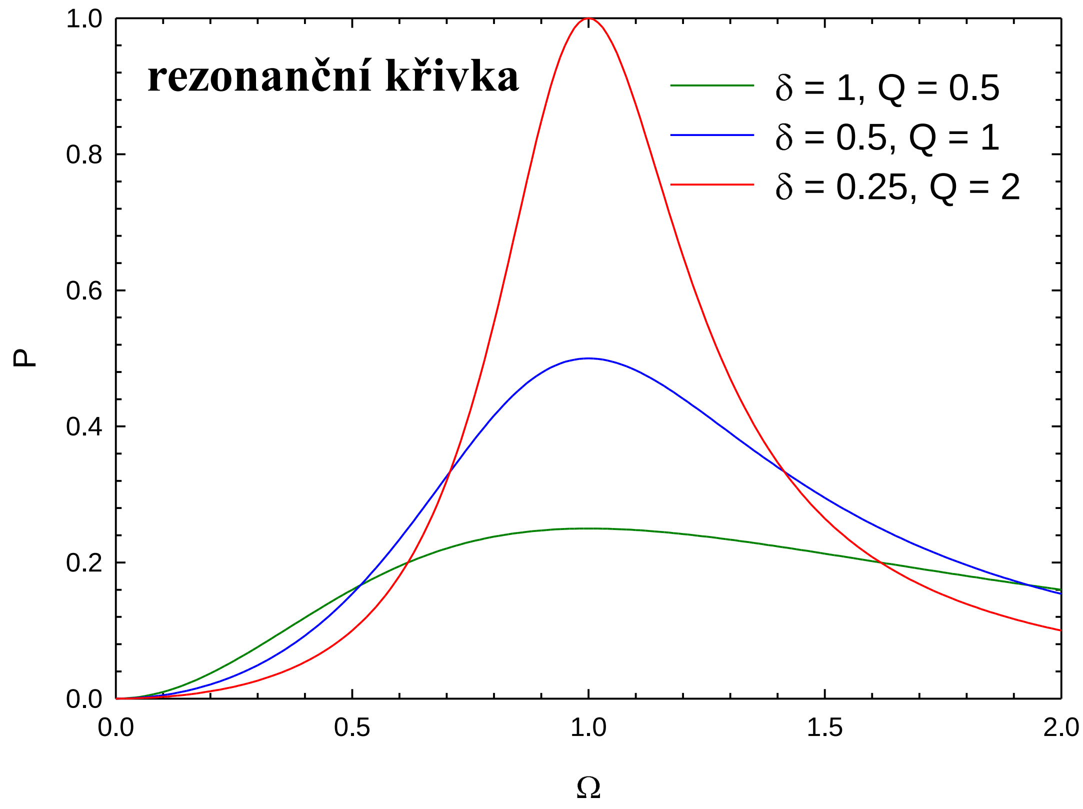
$$Q=\frac{\omega_0}{\Omega_2-\Omega_1}=\frac{\omega_0}{2\delta}$$



Nucené kmity s tlumením

- výkon vynucovací síly:

$$P(\Omega) = \frac{F_0^{\,2}\Omega^2\delta}{m\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]}$$



Nucené kmity s tlumením

• výkon vynucovací síly:

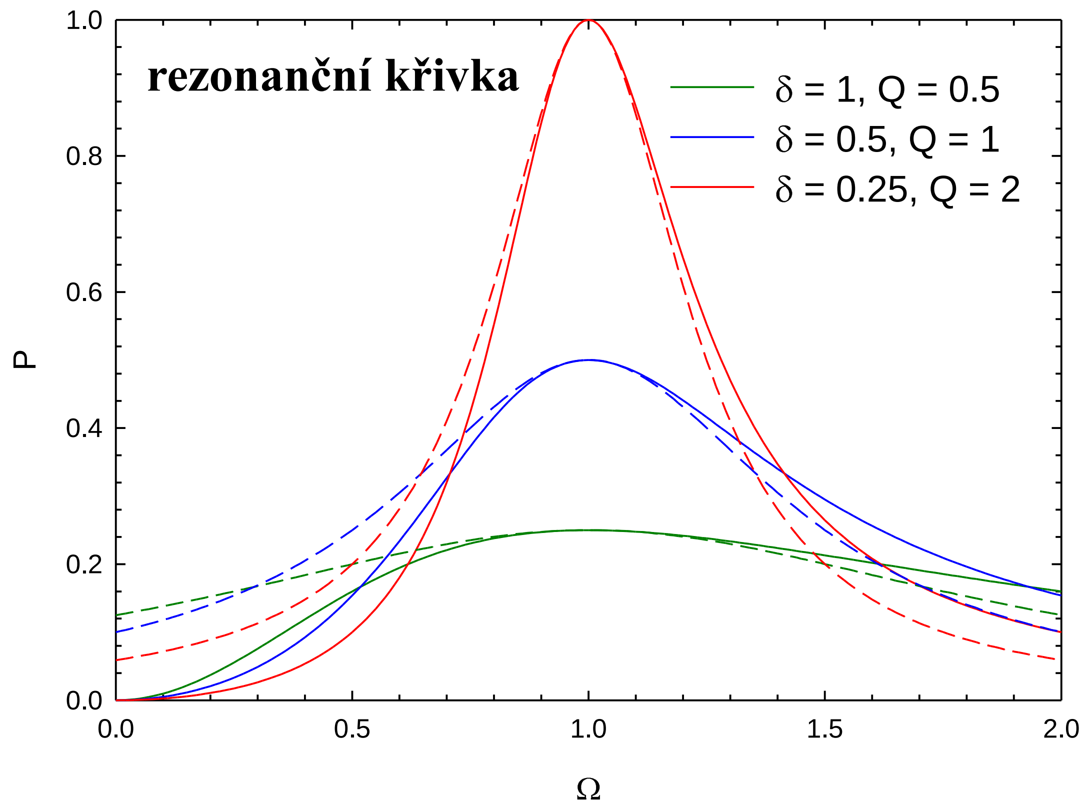
$$P(\Omega) = \frac{F_0^2 \Omega^2 \delta}{m\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]}$$

• v blízkosti rezonance $\Omega \approx \omega_0$:

Lorentzián

$$P_F \approx \frac{F_0^2 \delta}{4m\left[\left(\omega_0 - \Omega\right)^2 + \delta^2\right]}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$$



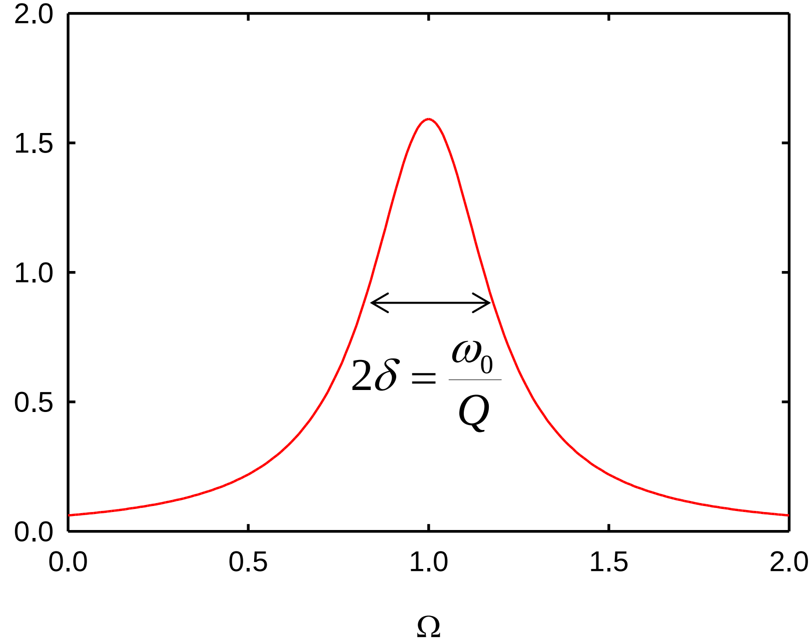
Univerzální rezonanční křivka

- **Lorentzián**

$$I(\Omega) = \frac{\delta}{(\omega_0 - \Omega)^2 + \delta^2}$$

rezonanční frekvence

tlumení



Nucené kmity s tlumením

• pokud přestane působit vynucovací síla bude amplituda kmitů klesat jako $e^{-\delta t} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$

• za jednu periodu poklesne faktorem $e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T} = e^{-\frac{\pi}{Q}}$

Q – za kolik cyklů se amplituda zmenší faktorem $e^{-\pi}$